

*Александр А. Локшин*

# **АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ**

Учебное пособие



---

МОСКВА – 2023

УДК 511.1(072)  
ББК 22.130я7  
Л73



<https://elibrary.ru/bhcxuc>

Рецензент:

*Е.А. Сагомонян* – канд. физ.-мат. наук, доцент, мехмат МГУ

**Локшин, Александр Александрович.**

**Л73     Арифметика на чашечных весах : учебное пособие /**  
**А.А. Локшин. – Москва : МАКС Пресс, 2023. – 32 с.:**  
**ил.**

**ISBN 978-5-317-06948-3**

Пособие состоит исключительно из арифметических задач, сформулированных в виде элементарных физических опытов с чашечными весами. Адресовано школьным учителям, студентам педвузов и родителям школьников.

УДК 511.1(072)  
ББК 22.130я7

---

*Учебное издание*

**ЛОКШИН Александр Александрович**

**АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ  
НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ**

*Учебное пособие*

*В издании использованы рисунки А.А. Локишина*

Подготовка оригинал-макета:

Издательство «МАКС Пресс». Главный редактор: *Е.М. Бугачева*.  
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*. Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 07.03.2023 г.

Формат 84х108 1/32. Усл.печ.л. 2,0. Тираж 25 экз. Заказ 026.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,  
2-й учебный корпус, 527 к. Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,  
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н

**ISBN 978-5-317-06948-3**

© А.А. Локшин, 2023

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	4
§1. Задачи на равноплечих весах .....	6
§2. Задачи на неравноплечих весах .....	11
§3. Разные задачи.....	15
§4. Поиск фальшивой монеты на неравноплечих весах .....	27
Ответы .....	30
Литература .....	31

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта маленькая книжка представляет собой продолжение пособия «Арифметика на чашечных весах» [1], посвященного иллюстрации (или, если угодно, экспериментальному подтверждению) основных арифметических законов. Использование блоков и разноплечих чашечных весов позволило сделать изложение наглядным и компактным.

Настоящее пособие состоит исключительно из арифметических задач, сформулированных в виде элементарных физических опытов с чашечными весами. Часть задач была ранее опубликована (с решениями) в [2].

Фактически, этой книжкой можно пользоваться независимо от [1]. При этом от читателя требуется знать (или интуитивно понимать) два элементарных физических факта:

**1. «Закон рычага».** Этот закон, открытый Архимедом, гласит: *Пусть имеется рычаг, плечи которого имеют соответственно длины  $L_1$  и  $L_2$ . Для равновесия этого рычага необходимо и достаточно, чтобы силы  $F_1$  и  $F_2$ , приложенные к соответствующим плечам, были направлены в одну сторону и удовлетворяли условию:  $F_1 L_1 = F_2 L_2$ .*

**2. «Закон действия блока».** *Неподвижный груз, перекинутый через блок, тянет плечо рычага вверх с силой, равной по величине своему весу.*

Всюду ниже мы будем для простоты считать рычаг и чаши весов невесомыми; кроме того, будем считать невесомой нить, перекинутую через блок.

Что касается систем единиц длины и веса, используемых ниже в задачах, то они могут быть взяты любыми, и их обозначения всюду опускаются. Таким образом, мы будем оперировать ниже с числовыми значениями соответствующих физических величин (длины и веса). Если угодно, можно считать, что вес всех грузов измеряется в килограммах, а длины плеч рычагов — в дециметрах. Книжка адресована школьным учителям, студентам педвузов и родителям школьников.

Автор признателен Наташе Десятковой за полезные обсуждения, касающиеся рисунков.

*Автор  
Москва, 2023*

## §1. Задачи на равноплечих весах

**Задача 1.** Даны равноплечие весы и система гирь, расположенных на чашах этих весов (см. рис. 1). Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии.

**Задача 2.** Даны равноплечие весы и система гирь, расположенных на чашах этих весов (см. рис. 2). Расставить такие числовые значения веса на гирях, чтобы правая чаша весов опустилась вниз.



Рис. 1

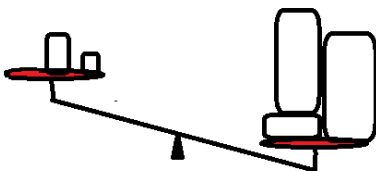


Рис. 2

**Задача 3.** Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии (см. рис. 3).

**Задача 4.** Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии (см. рис. 4).

**Замечание.** Для весов, находящихся в равновесии вес любого груза, перекинутого через блок, не может превышать веса связанного с ним груза, стоящего на чаше весов.



Рис. 3

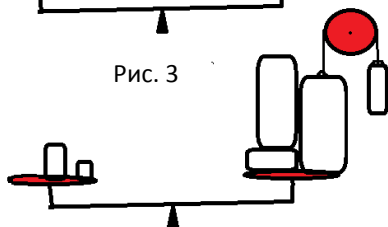


Рис. 4



**Задача 5.** *Определить численное значение  $x$  веса гири, перекинутой через блок, расположенный над левой чашей весов, находящихся в равновесии (см. рис. 5).*

**Задача 6.** *Определить численное значение  $x$  веса гири, расположенной на правой чаше весов, находящихся в равновесии (см. рис. 6).*

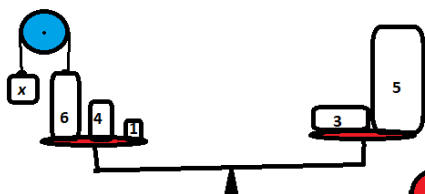


Рис. 5

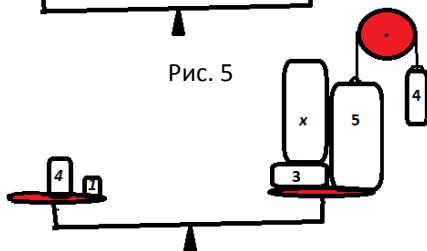


Рис. 6



**Задача 7.** Определить  $x$  из условия равновесия равноплечих весов на рис. 7.

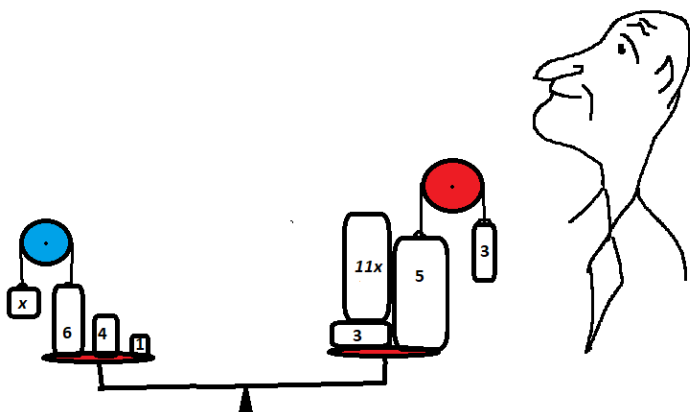


Рис. 7

**Задача 8.** Определить  $x$  из условия равновесия равноплечих весов на рис. 8.

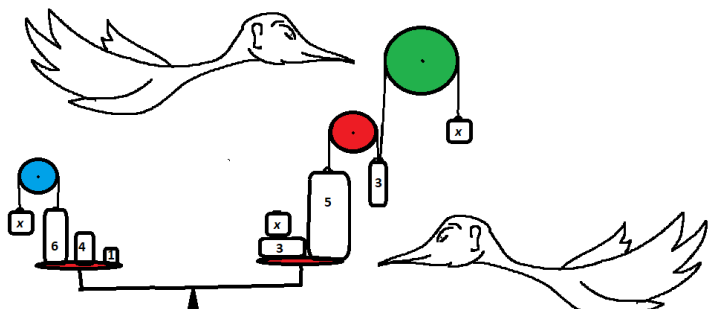


Рис. 8

**Задача 9.** Возможно ли при некотором  $x$  равновесие равноплечих весов, изображенных на рис. 9?



Рис. 9

## §2. Задачи на неравноплечих весах

**Задача 10.** Правое плечо чашечных весов вдвое длиннее левого; см. рис. 10. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.

**Задача 11.** Правое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее левого; см. рис. 11. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.

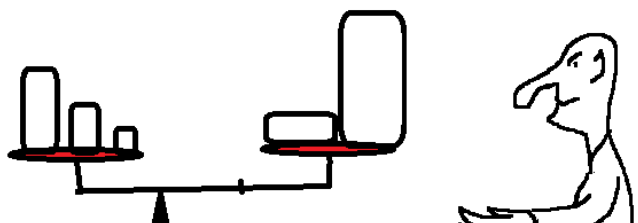


Рис. 10

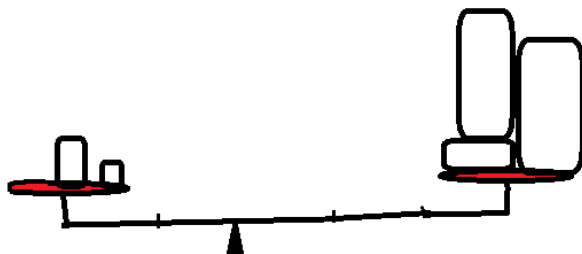


Рис. 11

**Задача 12.** Правое плечо чашечных весов вдвое длиннее левого; см. рис. 12. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.

**Задача 13.** Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 13. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.

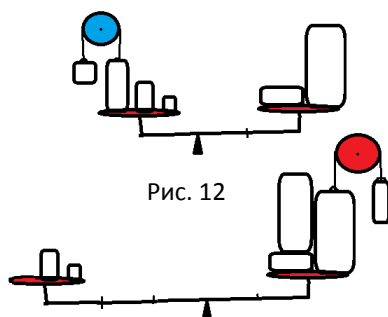


Рис. 12

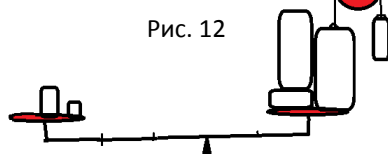
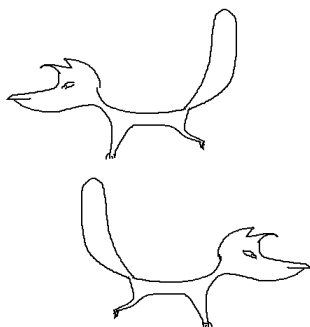


Рис. 13



**Задача 14.** *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 14. Найти численное значение  $x$  веса груза, перекинутого через блок. (Весы находятся в равновесии.)*

**Задача 15.** *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 15. Найти численное значение  $x$  веса груза на правой чаше, при условии, что весы находятся в равновесии.*

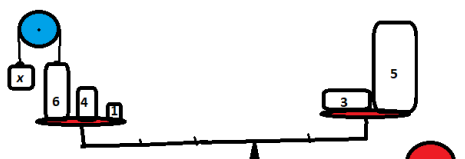


Рис. 14

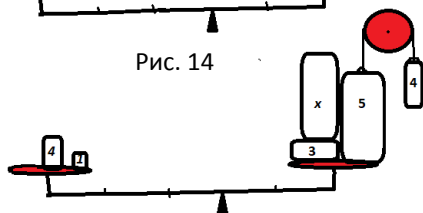
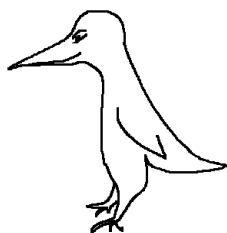


Рис. 15



**Задача 16.** *Левое плечо находящихся в равновесии чашечных весов в полтора раза короче правого; см. рис. 16. Найти численное значение  $x$ .*

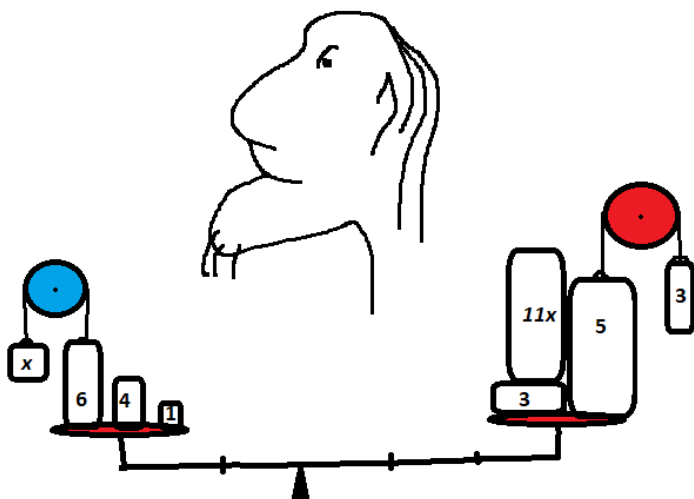
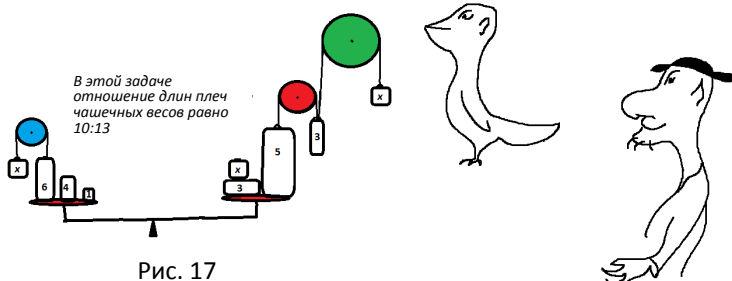


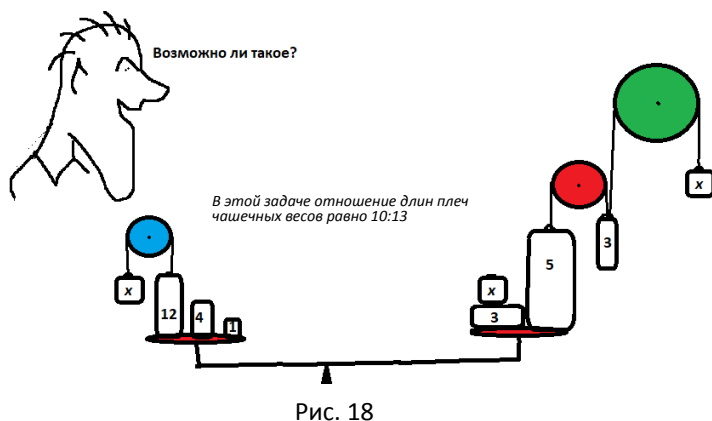
Рис. 16

### §3. Разные задачи

**Задача 17.** Найти численное значение  $x$ , обеспечивающее равновесие чашечных весов на рис. 17.



**Задача 18.** Возможно ли при некотором  $x$  равновесие чашечных весов, изображенных на рис. 18?



**Задача 19.** Требуется расположить грузы на равноплечих чашечных весах таким образом, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 19.

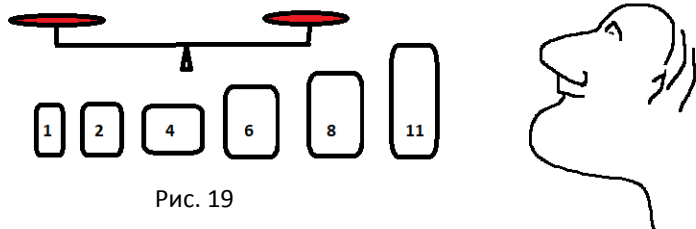


Рис. 19

**Задача 20.** Требуется расположить грузы на равноплечих чашечных весах таким образом, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 20.

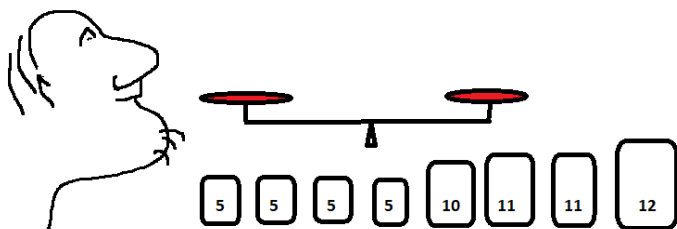


Рис. 20

**Указание.** Заметим, что веса всех гирь, кроме гирь с весами 11; 11; 12, делятся на 5. Для того, чтобы веса после расстановки всех гирь оставались в равновесии, необходимо, чтобы остатки от деления на 5 сумм весов гирь на каждой из чаш были равны. Это возможно лишь в том случае, если обе гири с весами 11; 11 и гиря с весом 12 будут располагаться на разных чашах. Дальнейшее очевидно.

**Задача 21.** *Снова равноплечие весы, и снова требуется расположить грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 21.*

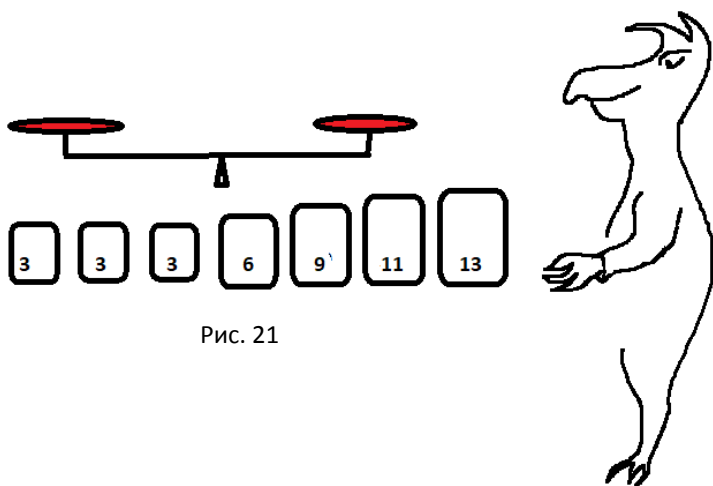


Рис. 21

**Задача 22\*.** Правое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 22.

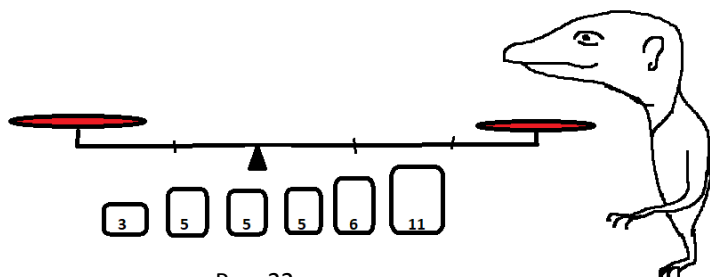


Рис. 22

**Задача 23.** Правое плечо чашечных весов в три раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 23.

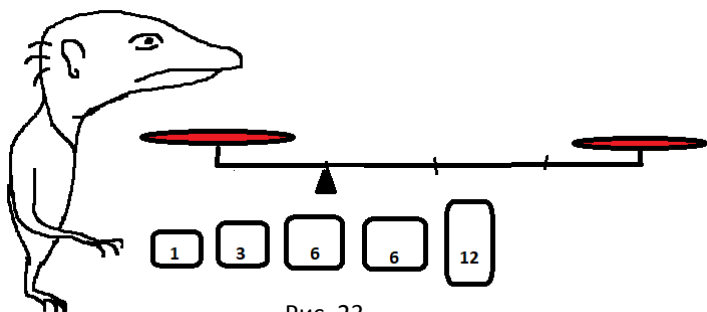


Рис. 23

**Задача 24.** Правое плечо чашечных весов в два раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 24.

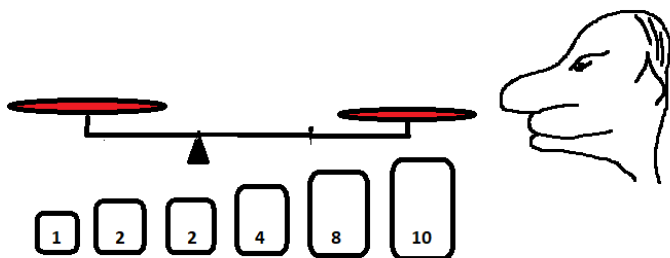


Рис. 24

**Задача 25.** Длины плеч чашечных весов относятся, как 3:7. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 25.

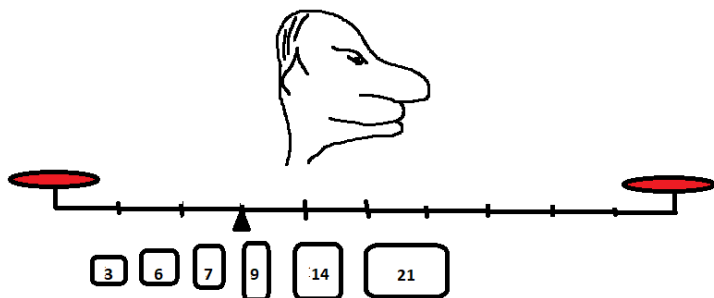


Рис. 25

**Задача 26.** Длины плеч чашечных весов относятся, как 3:7. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 26.

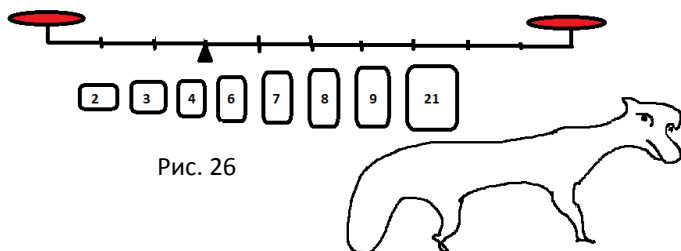


Рис. 26

**Задача 27.** Длины плеч чашечных весов относятся, как 2:3. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 27.

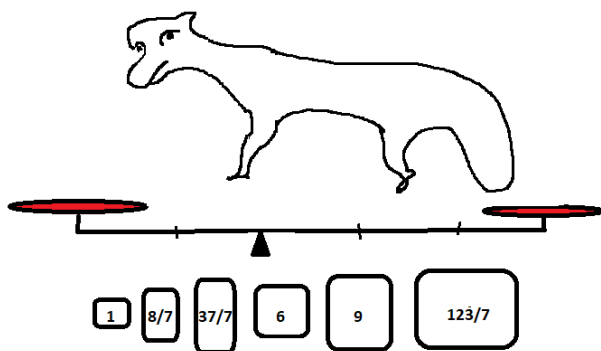


Рис. 27

**Указание.** Для равновесия рассматриваемых чашечных весов необходимо, чтобы суммы весов поставленных гирь, умноженные на длины соответствующих плеч, имели одинаковые дробные части для обеих чаш. Отсюда нетрудно вывести, что все гири дробного веса из имеющегося набора должны находиться на одной и той же чаше. Дальнейшее очевидно.

**Задача 27а** (см. [2]). *Даны уравновешенные, но неправильные чашечные весы (длина левого плеча равна 7 единицам, а длина правого плеча равна 9 единицам) и набор гирь с весами:*

9; 18; 19; 27; 33; 46; 100; 100.

*Требуется так расставить все эти гири на обеих чашах весов, чтобы весы оставались в равновесии.*

**Решение.** Прежде всего, перепишем еще раз список числовых значений весов всех гирь, указав в скобках величины остатков при делении на 9:

9 (0); 18 (0); 19 (1); 27 (0); 33 (6); 46 (1);

100 (1); 100 (1). (6')

Итак, *пять* из восьми числовых значений весов гирь имеют ненулевые остатки при делении на 9. Все пять соответствующих гирь поставить на правую чашу, очевидно, невозможно (правая чаша перетянет левую). Следовательно, некоторые из упомянутых пяти

гирь придется поставить на левую чашу, но при этом сумма соответствующих остатков должна делиться на 9. Ясно, что на левую чашу придется поставить четыре гири из упомянутых пяти. Короткий перебор вариантов приводит к ответу: на левую чашу следует поставить гири с весами 19; 33; 46; 100, а на правую чашу – все остальные гири.

**Замечание.** Составлять подобные задачи (имеющие ключ к быстрому решению) легко, а их решение может оказаться полезным для установления связей между математикой и физикой.

Вот как была составлена задача 27а. Пусть даны уравновешенные, но неравноплечие чашечные весы (длина левого плеча 7 единиц, длина правого плеча 9 единиц). Будем составлять набор гирь с такими целочисленными весами, что, поставив гири на обе чаши, мы оставим наши чашечные весы в равновесии.

Из этого условия ясно, что полный набор гирь, который нам нужен, должен состоять из двух непересекающихся групп гирь – «левой» и «правой». При этом суммарный вес «левой» группы должен нацело делиться на 9, а суммарный вес «правой» группы должен нацело делиться на 7. «Левую» группу гирь составляем с таким расчетом, чтобы вес каждой отдельно взятой гири имел ненулевой остаток при делении на 9.

Например, возьмем в качестве значений весов гирь из «левой» группы такие числа:

$$19 (1), 33 (6), 46 (1), 100 (1) \quad (*)$$

(в скобках указаны значения остатков при делении соответствующих чисел на 9).

Суммируя веса гирь из «левой» группы, т.е. числа из набора (\*), стоящие вне скобок, и умножая результат на 7, получаем численное значение момента силы, направленного против часовой стрелки:

$$M = 7(19 + 33 + 46 + 100) = 1386.$$

(Этот момент силы возникает от воздействия силы тяжести «левой» группы гирь на левое плечо наших чашечных весов.)

Таким же численным значением должен обладать момент силы, направленный по часовой стрелке, возникающий от воздействия силы тяжести «правой» группы гирь на правое плечо наших чашечных весов. Сумма весов «правой» группы гирь, очевидно, должна быть равна частному

$$M : 9 = 1386 : 9 = 154.$$

Теперь найденную сумму весов «правых» гирь можно «набирать» из отдельных слагаемых более-менее произвольным образом. Однако для того, чтобы у нашей задачи образовался «ключ» к быстрому решению, представим число 154 в виде суммы таких слага-

емых, из которых все, кроме одного, будут делиться на 9.

Например, положим:

$$154 = 100 + 9 + 18 + 27.$$

Итак, численные значения весов «правых» гирь – это слагаемые в правой части предыдущего равенства.

В результате получаем следующий объединенный набор гирь («левых» и «правых»):

$$9; 18; 19; 27; 33; 46; 100; 100. \quad (**)$$

Составление задачи 27а закончено.

**Задача 28.** Сколько должна весить каждая из трех гирь, чтобы на изображенных на рис. 28 неравноплечих чашечных весах (у которых отношение длин плеч равно 1:3) можно было уравновесить каждый из шести грузов, численные значения весов которых соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6?

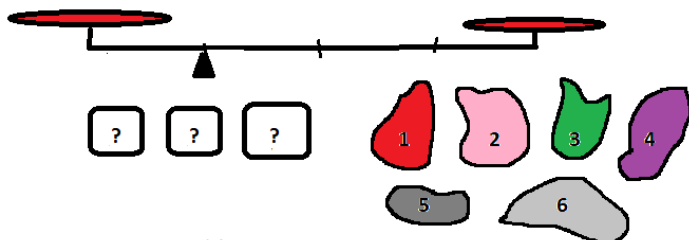


Рис. 28

**Задача 29.** Сколько должна весить каждая из трех гирь, чтобы на изображенных на рис. 29 неравноплечих чашечных весах (у которых отношение длин плеч равно 1:2) можно было уравновесить каждый из шести грузов, численные значения весов которых соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6?

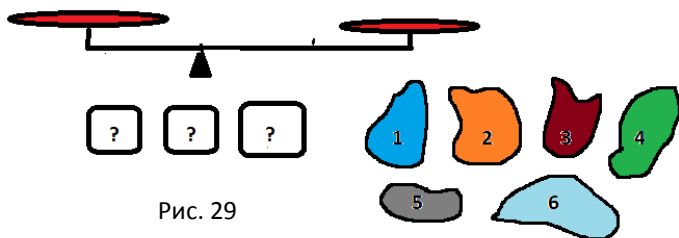


Рис. 29

**Задача 30.** На рис. 30 изображены неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 2:3. Возможно ли точно отвесить на этих весах  $1/6$  кг муки с помощью трех гирь весом соответственно в 1 кг, 1 кг и 2 кг?

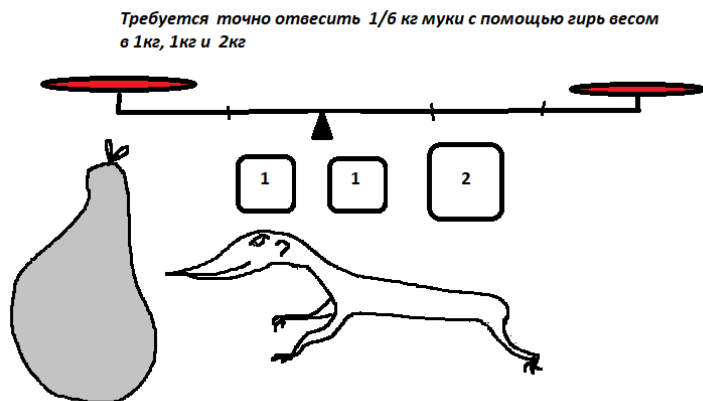


Рис. 30

#### §4. Поиск фальшивой монеты на неравноплечих весах

**Задача 31.** Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно  $1:3$  (см. рис. 31). Далее, имеются 9 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Требуется за три взвешивания на упомянутых весах гарантированно определить фальшивую монету.

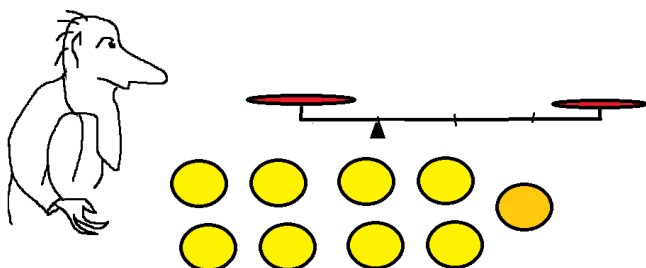
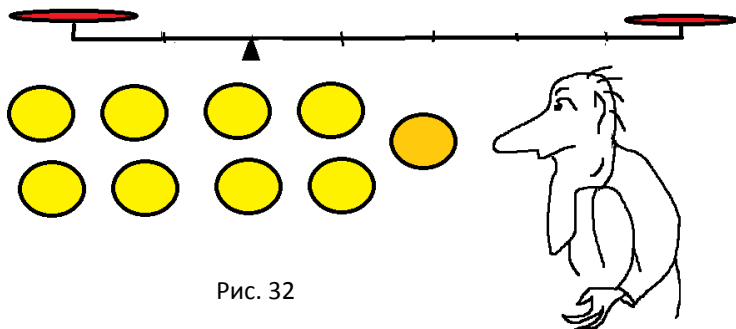


Рис. 31

**Указание.** При первом взвешивании на левую чашу можно положить шесть монет, а на правую – две. Впрочем, можно начать действовать и иначе: при первом взвешивании положить на левую чашу три монеты, а на правую – одну.

**Задача 32.** Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно  $2:5$  (см. рис. 32). Далее, имеются 9 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Требуется за три взвешивания на упомянутых весах с гарантией определить фальшивую монету.

**Указание.** При первом взвешивании на левую чашу следует положить пять монет, а на правую – две.



**Задача 33.** Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно  $m:n$ . Далее, имеется  $m+n+1$  монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих.

- А) За какое наименьшее количество взвешиваний можно с гарантией определить фальшивую монету?
- Б) Тот же вопрос, если имеется всего  $m+n+k$  монет.
- В) Тот же вопрос, если известно только, то фальшивая монета другого веса, чем настоящие (но неизвестно – легче она или тяжелее).

## Ответы

**К задаче 22:**  $2(11+5+5) = 3(6+5+3)$

**К задаче 23:**  $3(1+6) = 12+6+3$

**К задаче 24:**  $2(4+2+2+1) = 10+8$

**К задаче 25:**  $7(3+6+9) = 3(7+14+21)$

**К задаче 26:**  $3(7+[6+8]+21) = 7(3+[2+4]+9)$

**К задаче 27:**  $2(8/7 + 37/7 + 123/7) = 48$ ;  $3(1+6+9) = 48$

**К задаче 28:** гири с численными значениями веса 1; 1; 2

**К задаче 29:** гири с численными значениями веса 1; 1; 2

## **Литература**

1. Локшин, А.А., Бахтина О.В., Сагомоян Е.А. Арифметика на чашечных весах. Изд.2. – М.: МАКС Пресс, 2023. – 36 с.
2. Локшин, А.А. Делимость и гири на чашечных весах (в печати).
3. Кноп, К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – 5-е изд. – М.: МЦНМО, 2016. – 104 с.

